

25/11/2015

ΘΕΩΡΗΜΑ Έστω $a, b \in \mathbb{Z}, a, b \neq 0$. Τότε $a, b = |ab|$

ΠΟΡΙΣΜΑ: Έστω $a, b \in \mathbb{N}$. Τότε: $a = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}$ και $b = p_1^{b_1} \dots p_k^{b_k}$
όπου $a_i, b_i \geq 0, 1 \leq i \leq k$

$$\text{Τότε: } [a, b] = p_1^{\max\{a_1, b_1\}} \dots p_k^{\max\{a_k, b_k\}}$$

Απόδειξη: Γνωρίζουμε ότι: $a, b = ab \Rightarrow a_k + b_k$
 ~~$[a, b] = \frac{ab}{(a, b)}$~~

$$\Rightarrow [a, b] = \frac{p_1^{a_1+b_1} \dots p_k^{a_k+b_k}}{p_1^{\min\{a_1, b_1\}} \dots p_k^{\min\{a_k, b_k\}}} =$$

$$= p_1^{a_1+b_1-\min\{a_1, b_1\}} \dots p_k^{a_k+b_k-\min\{a_k, b_k\}} = p_1^{\max\{a_1, b_1\}} \dots p_k^{\max\{a_k, b_k\}}$$

Όπως $\forall a, b \in \mathbb{N}: a + b = \max\{a, b\} + \min\{a, b\}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: ① $[12, 30] = \frac{12 \cdot 30}{(12, 30)} = \frac{360}{6} = 60$

② $[2 \cdot 3^4 \cdot 11^{22}, 3^5 \cdot 11^7] = [2^1 \cdot 3^4 \cdot 11^{22}, 2^0 \cdot 3^5 \cdot 11^7] = 2^1 \cdot 3^5 \cdot 11^{22}$

③ $[16855, 18225, 360] = [2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^4, 2^0 \cdot 3^6 \cdot 5^2, 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5] = 2^3 \cdot 3^6 \cdot 5^4 = 3 \cdot 645 \cdot 1000$

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΟΦΑΝΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΟΤΗΣΕΙΣ

Μια Διοφαντική εξίσωση είναι να εξίσωση της μορφής:

$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, όπου $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ είναι ένα πολυώνιο με ακεραίες συντελεστές

π.χ. $f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 - 5x_1x_2$

$$0$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

$$\begin{cases} f(x,y,z) = x^n + y^n - z^n, n \geq 2 \\ f(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow x^n + y^n = z^n, n \geq 2 \end{cases} \quad (*)$$

Αν $n=2$ η Διοφαντίνη εξίσωση $(*)$ έχει άπειρες ακεραίες λύσεις (Πυθαγόρειες τριάδες)

Αν $n \geq 3$ $\nexists$ $\nexists$ δεν έχει καμία ακεραία λύση $\neq (0,0,0)$
[Τελευταίο Θέωρημα του Fermat (Wiles 1994)]

Θα ασχοληθούμε με Γραμμικές Διοφαντίνες Εξισώσεις στο τεταρτημύριο
δηλαδή εξισώσεις της μορφής: $ax + by = c$, όπου $a, b, c \in \mathbb{Z}$ $(*)$

Λύση (ακεραία πάντα) της $(*)$ कहता κάθε ζεύγος (x,y) έτσι
ώστε $ax + by = c$

Θετικό ακεραία λύση της $(*)$ $\nexists$ $\nexists$ (x,y) , όπου $\begin{matrix} x > 0 \\ y > 0 \end{matrix}$ $\nexists$

αρνητική ακεραία λύση $\nexists$ $\nexists$ $\nexists$ $\nexists$ $\begin{matrix} x < 0 \\ y < 0 \end{matrix}$ $\nexists$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Η Γραμμική Διοφαντίνη Εξίσωση $ax + by = c, a, b, c \in \mathbb{Z}$ $(*)$

~~έχει~~ έχει καθόλου λύση για ακεραία λύση $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow d = \text{op} (a,b) \mid c$. Αν (x_0, y_0) είναι μία
ακεραία λύση, τότε όλες οι ακεραίες λύσεις δίνονται
από τις τύψεις $X = x_0 + \frac{b}{d}t, Y = y_0 - \frac{a}{d}t, t \in \mathbb{Z}$

Απόδειξη: " $\Rightarrow$ " Υποθέτουμε ότι η $(*)$ έχει μία ακεραία λύση: (x_0, y_0)
 $ax_0 + by_0 = c$.

Οπως $d = (a,b) \Rightarrow \begin{cases} d \mid a \Rightarrow a = da' \\ d \mid b \Rightarrow b = db' \end{cases}$ για
κάποιες ακεραίες a', b' $(a', b') = 1$.

$d \mid c \Rightarrow c = db$

$$\begin{aligned} \text{Τότε } C &= ax_0 + by_0 = \\ &= da'x_0 + db'y_0 = \\ &= d(a'x_0 + b'y_0) \end{aligned}$$

Αρα: $d|C$

" $\Leftarrow$ " Υποθέτουμε ότι $d = (a, b) | C$

Τότε $d|a \Rightarrow a = da'$, όπου $(a', b') = 1$. Επίσης:

$$\begin{aligned} d|b \quad b &= db' \\ \text{Επειδή } d|C &\Rightarrow C = dc' = (ax_0 + by_0)c' = \\ &= a(x_0c') + b(y_0c') \end{aligned}$$

Αρα το ζεύγος αριθμών (x_0c', y_0c') αποτελεί λύση (*)

Από τώρα και στο εξής υποθέτουμε ότι: $d|C$ και ότι n (*) έχει μια λύση (x_0, y_0)

Αρα $ax_0 + by_0 = C$. Έστω (x, y) οποιαδήποτε λύση (*) $\Rightarrow$
 $ax + by = C$. Τότε $ax - ax_0 = by_0 - by \Rightarrow a(x - x_0) = b(y_0 - y)$.

Τότε: $da'(x - x_0) = db'(y_0 - y) \Rightarrow a'(x - x_0) = b'(y_0 - y)$ Τότε:

$$da'(x - x_0) = db'(y_0 - y) \Rightarrow a'(x - x_0) = b'(y_0 - y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a' | b'(y_0 - y) \xrightarrow[\text{ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ}]{\text{ΛΗΜΜΑ}} a' | y_0 - y$$

$$(a', b') = 1$$

$$\Rightarrow y_0 - y = a't \text{ για κάποιο } t \in \mathbb{Z} \Rightarrow y = y_0 - a't \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = y_0 - \frac{a}{d}t \text{ Επειδή: } a'(x - x_0) = b'(y_0 - y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a'(x - x_0) = b'a't \Rightarrow x = x_0 + b't \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = x_0 + \frac{b}{d}t$$

□

Έστω η ΓΔΕ: $ax+by=c$ (*), $a,b,c \in \mathbb{Z}$

① Εξετάζουμε αν $d \mid \gcd(a,b) \mid c$:

Αν $d \nmid c$ τότε η (*) δεν έχει ακέραιες λύσεις και σταματάμε

Αν $d \mid c$, πηδύ στο Βήμα ②

② Επειδή $d \mid c$ α $c = d \cdot c'$

Επειδή $d = \gcd(a,b)$ $\xrightarrow[\text{ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ}]{\text{ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ}}$ $\exists x'_0, y'_0 \in \mathbb{Z}$:

$d = ax'_0 + by'_0$, τότε:

μία ακέραια λύση εν (*) είναι η:

$(x'_0 c', y'_0 c') = (x_0, y_0)$ και μετά πηδύ στο Βήμα ③

③ Μπορούμε γράψουμε: $x = x'_0 + \frac{b}{d}t$, $y = y'_0 - \frac{a}{d}t$, $t \in \mathbb{Z}$

Έχουμε έτσι τις ακέραιες

λύσεις εν (*).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Έστω η ΓΔΕ: $1985x + 132y = 5$

Παρατηρούμε ότι $\gcd(1985, 132) = 1$ και: $1 = \frac{1985}{d} \cdot \frac{53}{a} + \frac{132}{d} \cdot \frac{-797}{b}$

και $1 \mid 5$
 $d \mid c$

Άρα η (*) έχει απείρως ακέραιες λύσεις και μία ακέραια λύση είναι η $(x_0, y_0) = \left(\frac{53 \cdot 5}{x'_0 c'}, \frac{-797 \cdot 5}{y'_0 c'} \right) = (265, -3985)$

Όλα οι ακέραιες λύσεις εν (*) είναι:

$$x = x_0 + \frac{b}{d}t = 265 + 132t$$

$$y = y_0 - \frac{a}{d}t = -3985 - 1985t, t \in \mathbb{Z}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ $3x+6y=5$ ΔΕΝ ΕΧΕΙ ΑΚΕΡΑΙΕΣ ΛΥΣΕΙΣ
ΔΙΟΤΙ $(3,6) \nmid 5$

Έστω ότι η ΠΔΕ: $ax+by=c$, έχει αλγεbras λύσεις, δηλαδή $d=(a,b) \mid c$.
Τότε οι αλγεbras λύσεις είναι:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{b}{d}t \\ y &= y_0 - \frac{a}{d}t, \quad t \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Ζητάμε βρούμε
αλγεbras λύσεις

$$\begin{aligned} x > 0 &\Rightarrow x_0 + \frac{b}{d}t > 0 \Rightarrow \frac{b}{d}t > -x_0 \Rightarrow \\ y > 0 &\Rightarrow y_0 - \frac{a}{d}t > 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -\frac{a}{d}t > -y_0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow bt > -dx_0 &\Rightarrow t > -\frac{d}{b}x_0 \\ at < dy_0 &\Rightarrow t < \frac{d}{a}y_0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow t \in \mathbb{Z} \cap \left(-\frac{d}{b}x_0, \frac{d}{a}y_0\right)$$

~~α~~
 $ax+by=c, \quad x \neq 0 \Rightarrow by = c-ax \Rightarrow y = \frac{c-ax}{b}$ και τότε $\left(x, \frac{c-ax}{b}\right)$
 $b \nmid 0$

Είναι πάλι λύση της *

Η αλγεbras διαγωνιστική επίλυση n-μεταβλητών $x_1, x_2, \dots, x_n$
είναι ως εξής: $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = c$, όπου $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$
 $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = c$, όπου $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ *

Η αλγεbras λύση της *

$(x'_1, \dots, x'_n) = a_1x'_1 + \dots + a_nx'_n = c$

Αν $d=(a_1, a_2, \dots, a_n)$, τότε η *